107 Sous-groupes finis de O(2,R) et de SO(3,R). Applications.

1) Une motivation

Prop : tout sg fini de GLn(R) est conjugué à un sous groupe fini de On(R) *(on est sur un espace muni d'un ps <>, on en crée un autre : $<x,y>'=\sum <gx,gy>$ pour $g\in G$. C'est bien un ps (vérifier), et $\forall g\in G$, $<gx,gy>'=<x,y>'$, donc $G\subset O(<>')$, qui est conjugué à On(R))*

I) Le groupe O(2) [Szp]

1) Le groupe O2

Prop : tête des éléments de O2. Deux possibilités : rotations et symétries orthogonales. TABLEAU.

Cor : SO2 est commutatif.

Cor : les éléments de O2\SO2 sont d'ordre 2.

Définition : si on se donne deux bases direct de R^2, et r dans SO2, alors la matrice de r dans les deux bases est la même, car la matrice de passage est un élément de SO2 donc commute. θ dépend donc pas de la base. On peut ainsi définir l'angle de la rotation.

Détermination de l'angle : v unitaire : det(v,r(v))=θ ; <v,r(v)>=θ

2) Sous groupes finis de O2

Prop : SO2 isomph à U *(on identifie R^2 à C. Les endomph sont du type $z\to az$. On regarde le mph $U\to SO2$ qui à a associe $z\to az$. Isomorphisme clair)*

Cor : les sg finis de SO2 sont de la forme {R_{2kPi/n},k}, ce sont des groupes cycliques *(l'isomorphisme ci-dessus échange les sg de u avec les sg de SO2. Or les sg de U sont les groupes Un cycliques. On regarde l'image d'un tel groupe et c'est ce qu'on cherche)*

Rq : un sous groupe non trivial de SO2 est donc fini. Si son cardinal est n, il correspond à l'ensemble des rotations laissant stable le polygone à n côtés.

Prop : un sg fini de O2 est soit cyclique, soit isomorphe au groupe diédral *(G un groupe fini. si G est dans SO2, c'est clair que G est cyclique. Sinon, on note $H=G\cup SO2$. H cyclique, H=<a>. H est d'indice 2 dans G. Soit b dans G\H. b est dans O2\SO2 donc c'est une réflexion, d'ordre 2. Les éléments de G sont donc $\{Id,a,a^2,\dots,a^{n-1},b,ba,ba^2,\dots,ba^{n-1}\}$. ab n'est pas dans H donc c'est une réflexion donc abab=Id, d'où aba=b. On reconnait les relations du groupe diédral)*

II) Le groupe O(3) [Szp] + [BR] + [Com]

On sait qu'il existe des polyèdres. On voit bien que les rotations les préservant forment un sg fini de SO(3). Sont-ce les seuls ?

1) Le groupe O3 [Szp]

Prop : têtes des éléments de O3. 3 Possibilités : rotation (SO3), symétrie par rapport à un plan, et produit d'une rotation par une symétrie. TABLEAU avec type, forme, exemple *(se fait en raisonnant sur la dimension de ker(u-Id). Si c'est 3, u=Id. Si c'est 2, on prend une base et on complète en (e1,e2,e3), ça donne diag(1,1,-1), symétrie par rapport à un plan. Si c'est 1, l'orthogonal est de dim 2 et est stable par u, et par l'étude précédente, on connait la t^te de la matrice. Il existe deux cas, qui vont nous donner une rotation, et le produit d'une rotation avec une symétrie par rapport à un plan. Si dim=0, alors on regarde Ker(u+Id), et on arrive soit à une rotation, soit à un produit rotation/symétrie)*

Ex : Id est une rotation. diag(1,1,-1) est une symétrie.

Déf : une rotation qui s'écrit diag(1,-1,-1) s'appelle un retournement

2) Sous groupes finis de SO(3) [BR] + [Com]

Prop : si G est un sg fini de SO(3), G agit sur les pôles des éléments de G

Th : sous groupes finis de SO(3), avec les isomorphismes *(dans le développement, admettre le dernier)*
Bien détailler l'énoncé.

III) Liens entre les sg de SO(3) et les polyèdres [Ale]

1) Présentation des polyèdres [Ale]

Déf, existence etc

2) Groupes d'isométries des polyèdres

Déf : Isom(X), Isom+(X)

Prop : si O est centre de symétrie, alors Isom(X) est produit direct de Isom+ et de Z/2Z.

Exemple : cube, dodécaèdre, icosaèdre.

Prop : si X est fixé par une réflexion orthogonale alors Isom(X) est psd de Isom+ avec Z/2Z

Ex : Isom(T)

Déf : dualité

Prop : isomorphismes entre Isom duaux *(si g est dans Isom(X), g fixe les sommets de X, donc aussi les barycentres, qui sont les sommets de X*, donc g fixe X* donc Isom(X)⊂Isom(X*). Par dualité, Isom(X*)⊂Isom(X**)=Isom(X))*

Bilan : égalités

3) Le lien entre les deux

Th : isomorphismes entre les Isom et les sg de Sn

Dictionnaire isométries/permutations

Développements :
1 - Iso+(T) et Iso+(C) [Aless 62] (**)
2 - Sous groupes finis de SO_3, 3 cas [Combes] + [BR] (***)

Bibliographie :
[Szp] Szpirglas
[BR] Bouvier Richard
[Com] Combes
[Ale] Alessandri

Rapport du jury :
Cette leçon est certes relativement fermée, mais elle permet d'illustrer les notions de groupes finis et d'action sur un espace vectoriel. Elle illustre de manière élémentaire le lien profond entre groupe et géométrie. Préparer cette leçon constitue un bon investissement pour un futur enseignant de lycée. Il faut déduire de l'étude des sous-groupes finis de *SO*(3,R) la nature des sous-groupes finis du groupe affine en dimension 3. Il faut réfléchir au groupe des applications affines qui préservent un parallélépipède.